

確率統計II レポート課題

第 10 回の授業開始時に提出. この紙に書いて提出.

学籍番号 _____

名前 _____ 解答例

確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots$ は独立で, それらの確率分布が

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

であるとする. $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) S_3 および S_4 の確率分布を求めよ (答えのみでよい).

(2) $P(S_{2n} = 0)$ を求めよ.

(3) 次の等式が成り立つことを示せ:

$$P(S_{2n} = 2m) = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{(n+m)!(n-m)!},$$

ただし, 整数 m は $-n \leq m \leq n$ を満たすとする. なお, (2) と (3) は第 10 回の授業のときに使う.

模範解答は (3) のみ記す.

(考え方)

求めたい確率 $P(S_{2n} = 2m)$ は, 確率変数の和 $S_{2n} = X_1 + \dots + X_{2n}$ が特定の値をとる確率であり, 各 X_i は独立に 1 または -1 をとるので, これは反復試行の問題である. $X_1, \dots, X_{2n}$ のうち, ちょうど何個の実現値が 1 になるのかをとらえられれば, 高校の数学 A で学んだ反復試行の公式が適用できる.

(解答例)

$X_1, \dots, X_{2n}$ のうち, ちょうど k 個の実現値が 1 であるとする, 残りの $2n - k$ 個の実現値は -1 である. $S_{2n} = 2m$ となる k を求めると,

$$k \cdot 1 + (2n - k) \cdot (-1) = 2m$$

より, $k = n + m$ である. よって, $S_{2n} = 2m$ であることと, $X_1, \dots, X_{2n}$ のうち, ちょうど $n + m$ 個の実現値が 1 であることが同値である. $n + m$ 個の実現値が 1 である確率は, 数学 A の反復試行の確率の公式を適用すればよく,

$$\begin{aligned} P(S_{2n} = 2m) &= P(X_1, \dots, X_{2n} \text{ のうち, ちょうど } n + m \text{ 個の実現値が } 1) \\ &= \binom{2n}{n+m} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-(n+m)} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{(n+m)!(2n-(n+m))!} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{(n+m)!(n-m)!} \end{aligned}$$

である.