7　正則行列・行列の n 乗

A 問題（必須問題）

7.A.1 行列 A, P をそれぞれ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

と定める．このとき，$P^{-1}AP$ を計算し，A^n を求めよ．

B 問題（標準問題）

7.B.1 α を実数とする．次の等式を数学的帰納法を用いて示せ．

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{bmatrix}$$

7.B.2 ひとつの行の成分がすべて 0 である正方行列は正則でないことを示せ．

7.B.3 正方行列 A が対称行列ならば，A^{-1} も対称行列であることを示せ．

7.B.4 A を正方行列とし，P を正則行列とするとき，$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}\,A$ が成り立つことを示せ．

7.B.5 7.B.1 を次のような方法でも証明してみよう．

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とすると，$A = \alpha I + N$ である．$(\alpha I)N = N(\alpha I)$ なので，A^n を計算するにあたり二項定理が適用できる．二項定理を用いて A^n を計算せよ．

C 問題（発展問題）

7.C.1 次の行列 A の n 乗を求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

7.C.2 $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

7.C.3 行列 A, P をそれぞれ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

と定める．このとき，$P^{-1}AP$ を計算し，A^n を求めよ．