

4 転置行列

A 問題 (必須問題)

- 4.A.1 行列 A, B, C が次で与えられるとき, 積 $A^T B, AC^T, B^T C, BA^T, C^T A, C^T B$ を計算せよ.
ただし, 積が定義されないものについては「定義されない」と答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- 4.A.2 A が交代行列ならば, A^2 は対称行列であることを示せ.

B 問題 (標準問題)

- 4.B.1 交代行列の対角成分はすべて 0 であることを示せ.
4.B.2 A, B が対称行列であるとする. このとき, 積 AB が対称行列であることと $AB = BA$ が同値であることを示せ.
4.B.3 A が対称行列ならば, A^k も対称行列であることを示せ. ただし, k は自然数である.
4.B.4 実行列 A に対して, $\text{tr}(A^T A) \geq 0$ であることを示せ.

C 問題 (発展問題)

- 4.C.1 A を実行列とするとき, $A^T A = O$ ならば $A = O$ であることを示せ.
4.C.2 A を正方行列とする. すべての列ベクトル \boldsymbol{x} に対して $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = 0$ ならば, A は交代行列であることを証明せよ.