知らない用語が登場したら教科書の索引から調べよ.

3　行列の積・トレース

A 問題（必須問題）

3.A.1 行列 A, B, C が次で与えられるとき，積 AB, AC, BC, BA, CA, CB を計算せよ．ただし，積が定義されないものについては「定義されない」と答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

3.A.2 行列 A, P, Q, R が次で与えられるとする．積 PA, AP, QA, AQ, RA, AR を計算せよ．何か気づくことはあるか観察せよ.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

3.A.3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ とする．$AX = I$ となる 2 次の正方行列 X は存在しないことを示せ.

3.A.4 次の行列 A, B がそれぞれべき零行列，べき等行列であることを示せ.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

3.A.5 A, B を正方行列とするとき，$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$ が成り立つことを示せ.

3.A.6 A, B を正方行列とする．実数 k に対して $\operatorname{tr}(kA) = k \operatorname{tr} A$ が成り立つことを示せ.

B 問題（標準問題）

3.B.1 問題 3.A.4 の行列 B がべき零行列でないことを示せ.

3.B.2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とし，$bc = ad$ であるとする．2 以上の整数 k に対して $A^k = (a+d)A^{k-1}$ を示せ.

3.B.3 トレースを考えることにより，$AB - BA = I$ となる正方行列 A, B は存在しないことを示せ.

C 問題（発展問題）

3.C.1 問題 3.B.2 において，ある自然数 n に対して $A^n = O$ であれば，$A^2 = O$ であることを示せ.

3.C.2 A を正方行列とする．任意の正方行列 X に対して $\operatorname{tr}(AX) = 0$ ならば，$A = O$ であることを示せ.