2　条件付きの和

A 問題（必須問題）

2.A.1 次の値を計算せよ．

$$\sum_{\substack{1\le k\le 10\\ k\ \text{は偶数}}} k,\qquad \prod_{\substack{1\le k\le 10\\ k\ \text{は素数}}} (k-1),\qquad \sum_{1\le i<j\le 4} (i+j)$$

B 問題（標準問題）

2.B.1 n を 2 以上の整数とする．実数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して，等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$$

が成り立つことを示せ．数学的帰納法などで厳密に証明してもよいが，自分の中で成立することに確信が持てればそれでよい．

2.B.2（問題 2.C.2 の準備）n を正の整数とする．等式

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

が成り立つことを示せ．ほぼ知識問題なので解法を知らない場合は調べよ．

C 問題（発展問題）

2.C.1（ラグランジュの恒等式）実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ および $b_1, b_2, \ldots, b_n$ に対して，等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 + \sum_{1\le i<j\le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

が成り立つことを示せ．

2.C.2 集合 X の要素の個数を $|X|$ で表す（高校までは $n(X)$ と表記していたが，大学では $|X|$ または $\#X$ と表す）．n を正の整数とする．等式

$$\sum_{S\subset\{1,2,\ldots,n\}} |S| = n2^{n-1}$$

が成り立つことを示せ．ただし，和は集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ のすべての部分集合 S を対象としている．例えば，$n = 2$ の場合，S は $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ の 4 つが対象であり，それぞれ $|\emptyset| = 0, |\{1\}| = |\{2\}| = 1, |\{1, 2\}| = 2$ であるから，

$$\sum_{S\subset\{1,2\}} |S| = 0 + 1 + 1 + 2 = 4 = 2\cdot 2^{2-1}$$

である．問題の等式の証明は，次の計算を参考にしてもよい．

$$\sum_{S\subset\{1,2,\ldots,n\}}|S| = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{S\subset\{1,2,\ldots,n\}\\|S|=k}}|S| = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{S\subset\{1,2,\ldots,n\}\\|S|=k}}k = \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

2.C.3 n を正の整数とする．等式

$$\sum_{S\subset\{1,2,\ldots,n\}}\prod_{k\in S}k = (n+1)!$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．次の計算を参考にしてもよい．数学的帰納法による証明において，$n=m$ で成り立つと仮定したあと，$n=m+1$ のとき，$\{1,2,\ldots,m+1\}$ の部分集合 S を，「$m+1\notin S$ であるもの」と「$m+1\in S$ であるもの」に分けて考えると

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{S\subset\{1,2,\ldots,m,m+1\}}\prod_{k\in S}k \\
&= \sum_{S\subset\{1,2,\ldots,m\}}\prod_{k\in S}k + \sum_{\substack{S\subset\{1,2,\ldots,m+1\}\\m+1\in S}}\prod_{k\in S}k \\
&= (m+1)! + \sum_{T\subset\{1,2,\ldots,m\}}\prod_{k\in T\cup\{m+1\}}k \\
&= (m+1)! + \sum_{T\subset\{1,2,\ldots,m\}}(m+1)\prod_{k\in T}k \\
&= (m+1)! + (m+1)\sum_{T\subset\{1,2,\ldots,m\}}\prod_{k\in T}k \\
&= (m+1)! + (m+1)\cdot(m+1)! \\
&= (m+2)!
\end{aligned}$$