取り組み方

- 授業中に全部解き切ることは要求していない．
- 次の授業までに B 問題までには着手していること．できれば B 問題は解き切って欲しい．
- 解答はない．友達と答え合わせをするなり，生成 AI を使ってよい．
- どの問題も 3 分以上は自分で手を動かして試行錯誤しよう．手が止まったら友達と議論しても良いし，生成 AI に聞いてみても良い．生成 AI に聞くときは，問題をスクショして画像を共有すると効率がいいかも．

なお，今回と次回の演習問題は正確には「線形数学 I」の範囲外である．しかし，二重和や総積は大学では当たり前のように出てくる一方で，これらの計算には慣れが必要である．今回取り扱う二重和は，総和 $\sum$ 自体が高校範囲である以上，二重和も高校範囲といえる．総積については，記号こそ新出であるものの

$$\prod_{i=1}^{n} a_i$$

が機械的に $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ に置き換われば高校範囲である．高校範囲であるのだが，すべての問題をスムーズに解ける学生は多くないだろうと推測する．

1　二重和・総積

A 問題（必須問題：必ず解けなければならない）

1.A.1 n を正の整数とする．次を計算し，結果を n の式で表せ．

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} i$$

1.A.2 n を正の整数とする．次を計算し，結果を n の式で表せ．

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} (i+j)$$

1.A.3 n を正の整数とする．次の等式を示せ．数学的帰納法を使わずに式変形のみで示すことが望ましい．

$$\prod_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

1.A.4 非負の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して，不等式

$$\prod_{i=1}^{n} (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$$

が成り立つことを示せ．ここで，「$\geq$」は「$\geqq$」を意味する．大学では不等号はこの記号を使う．「$\leq$」も同様．

B 問題（標準問題：できることが望ましい）

1.B.1 n を正の整数とする．次を計算し，結果を n の式で表せ．

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j|$$

1.B.2 n を正の整数とする．次の等式を示せ．ただし，$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ である．高校までは ${}_n\mathrm{C}_k$ と書いていたが，大学では $\binom{n}{k}$ と書く．

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2k}\right)$$

数学的帰納法を使わずに式変形のみで示すことが望ましい．

1.B.3 N を正の整数とする．各 i,j に対して，実数 $a_{i,j}$ が定義されているとする（ただし，$0\le i\le N, 0\le j\le N$ とする）．このとき，等式

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{i}a_{i,j}=\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=j}^{N}a_{i,j}$$

が成り立つことを示せ（自分の中で成立することに確信が持てればそれでよい）．

1.B.4 N を正の整数とする．次を計算し，結果を N の式で表せ．

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N}\binom{n}{k}$$

1.B.5 実数 a,b に対し $\max(a,b)$ を

$$\max(a,b)=\begin{cases}a & (a\ge b\text{ のとき})\\ b & (a<b\text{ のとき})\end{cases}$$

と定める．正の整数 n に対して

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max(i,j)$$

とするとき，S_n を n の式で表せ．

C 問題（発展問題：意欲的な人向け）

該当なし．