

2025年度 線形数学演習I 期末試験 問題用紙 (片面1枚)

1 行列 X の (i, j) 成分を $X_{i,j}$ とかく. 次の文章の空欄を
うめよ.

- A を $m \times n$ 行列, B を $p \times q$ 行列とする. 積 AB は (1) のときに定義され, その型は (2) であり, (i, j) 成分は $(AB)_{i,j} =$ (3) である.
- $m \times n$ 行列 C の転置行列 tC とは, 型が (4) の行列で (i, j) 成分が $({}^tC)_{i,j} =$ (5) で定まる行列である.
- 正方行列 M は (6) を満たすとき対称行列といい, (7) を満たすとき交代行列という. また, 「 $i \neq j$ ならば $M_{i,j} = 0$ 」を満たすとき, M は (8) であるといい, 「 $i > j$ ならば $M_{i,j} = 0$ 」を満たすとき (9) という.

4 a, b を定数とし, 行列 A を

$$\begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$$

とする. 次の問に答えよ.

- (1) $a = 2, b = 1$ のときの A の行列式を求めよ.
- (2) A の行列式を a, b の式で表せ. 因数分解した形で答えること.

5 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

と定める. 次の問に答えよ.

- (1) A の行列式を求めよ.
- (2) A の $(2, 2)$ 余因子を求めよ.
- (3) A の $(2, 3)$ 余因子を求めよ.
- (4) A の逆行列を求めよ.

2 k を定数とする. 連立方程式

$$\begin{cases} x - y - 4z &= 0 \\ -x + 2y + (k+3)z &= 1 \\ 2x + (3-k)y - 8z &= 4k \end{cases}$$

について, 以下の問に答えよ.

- (1) $k = 0$ のとき, この連立方程式を解け.
- (2) $k = 1$ のとき, この連立方程式を解け.
- (3) この連立方程式が解を持たないときの k の値を求めよ.

6 行列 A, P をそれぞれ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

と定める. 次の問に答えよ.

- (1) A^2 を求めよ.
- (2) P の逆行列 P^{-1} を求めよ.
- (3) $P^{-1}AP$ を求めよ.
- (4) 正の整数 n に対して A^n を求めよ.

3 k を定数とし, 行列 A を

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & k+4 & -4 & k+6 \\ 4 & k+10 & k-8 & k+14 \end{bmatrix}$$

とする. 次の問に答えよ.

- (1) $k = 2$ のときの A の標準形を求めよ.
- (2) k の値によって場合分けをして, 一般の k に対して A の階数を求めよ.

7 A, B を n 次正方行列とするとき, ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ が成り立つことを示せ.