確率統計II　レポート課題

第 10 回の授業開始時に提出．両面合わせて 2 題．この紙に書いて提出．

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　　名前 解答例

$\boxed{1}$ 実数値をとる離散型確率変数 X, Y が独立であるとする．このとき，X^2 と Y^2 も独立であること，すなわち

$$P(X^2 = a, Y^2 = b) = P(X^2 = a)P(Y^2 = b)$$

がすべての非負実数 a, b に対して成り立つことを示せ．

（考え方）

授業でも説明したように，確率の条件部（$P(\cdots)$ の中身）は同値な形に自由に書き換えてよい．このことを利用して，「X, Y が独立である」という仮定が使える形に変形する．

（解答例）

$$\begin{aligned}
P(X^2 = a, Y^2 = b) &= P(X = \pm\sqrt{a}, Y = \pm\sqrt{b}) \\
&= P\Big((X, Y) = (\sqrt{a}, \sqrt{b}), (\sqrt{a}, -\sqrt{b}), (-\sqrt{a}, \sqrt{b}), (-\sqrt{a}, -\sqrt{b})\Big) \\
&= P\Big((X, Y) = (\sqrt{a}, \sqrt{b})\Big) + P\Big((X, Y) = (\sqrt{a}, -\sqrt{b})\Big) \\
&\qquad + P\Big((X, Y) = (-\sqrt{a}, \sqrt{b})\Big) + P\Big((X, Y) = (-\sqrt{a}, -\sqrt{b})\Big) \\
&= P(X = \sqrt{a})P(Y = \sqrt{b}) + P(X = \sqrt{a})P(Y = -\sqrt{b}) \\
&\qquad + P(X = -\sqrt{a})P(Y = \sqrt{b}) + P(X = -\sqrt{a})P(Y = -\sqrt{b}) \\
&= \Big\{P(X = \sqrt{a}) + P(X = -\sqrt{a})\Big\}\Big\{P(Y = \sqrt{b}) + P(Y = -\sqrt{b})\Big\} \\
&= P(X = \pm\sqrt{a})P(Y = \pm\sqrt{b}) \\
&= P(X^2 = a)P(Y^2 = b)
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots$ は独立で，それらの確率分布が

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

であるとする．$S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) S_3 および S_4 の確率分布を求めよ（答えのみでよい）．

(2) $P(S_{2n} = 0)$ を求めよ．

(3) 次の等式が成り立つことを示せ：

$$P(S_{2n} = 2m) = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{(n+m)!(n-m)!},$$

ただし，整数 m は $-n \leq m \leq n$ を満たすとする．なお，(2) と (3) は第 10 回の授業のときに使うかもしれない．

解答は (3) のみ記す．

（考え方）

求めたい確率 $P(S_{2n} = 2m)$ は，確率変数の和が特定の値をとる確率である．各 X_i は独立に 1 または -1 をとり，いずれも確率が $\frac{1}{2}$ であるから，これは典型的な反復試行の問題である．$X_1, \dots, X_{2n}$ のうち，ちょうど何個の実現値が 1 になるのかがとらえられれば，数学 A で学んだ反復試行の公式が適用できる．

（解答例）

$X_1, \dots, X_{2n}$ のうち，ちょうど k 個の実現値が 1 であるとすると，残りの $2n-k$ 個の実現値は -1 である．$S_{2n} = 2m$ より，

$$k \cdot 1 + (2n-k) \cdot (-1) = 2m$$

であるから，これを解いて $k = n+m$ を得る．よって，$S_{2n} = 2m$ であることと，$X_1, \dots, X_{2n}$ のうち，ちょうど $n+m$ 個の実現値が 1 であることが同値である．$n+m$ 個の実現値が 1 である確率は，数学 A の反復試行の確率の公式を適用すればよく，

$$\begin{aligned}
P(S_{2n} = 2m) &= P\left(X_1, \dots, X_{2n} \text{ のうち，ちょうど } n+m \text{ 個の実現値が } 1\right) \\
&= \binom{2n}{n+m} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-(n+m)} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{(n+m)!(2n-(n+m))!} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{(n+m)!(n-m)!}
\end{aligned}$$

である．