2024年度　線形数学演習I　期末試験　問題用紙（片面１枚）

$\boxed{1}$ 実数 a, b に対し $\max(a, b)$ を

$$\max(a,b) = \begin{cases} a & (a \geq b \text{ のとき}) \\ b & (a < b \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．正の整数 n に対して

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \max(i,j)$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) S_3 を求めよ．

(2) S_n を n の式で表せ．

$\boxed{2}$ 行列 X の (i,j) 成分を $X_{i,j}$ とかく．次の文章の空欄をうめよ．

- A を $m \times n$ 行列，B を $p \times q$ 行列とする．積 AB は（　(1)　）のときに定義され，その型は（　(2)　）であり，(i,j) 成分は $(AB)_{i,j} =$（　(3)　）である．
- $m \times n$ 行列 C の転置行列 ${}^tC$ とは，型が（　(4)　）の行列で (i,j) 成分が $({}^tC)_{i,j} =$（　(5)　）で定まる行列である．
- 正方行列 M は（　(6)　）を満たすとき対称行列といい，（　(7)　）を満たすとき交代行列という．また，ある自然数 k に対して（　(8)　）を満たす行列をべき零行列といい，（　(9)　）を満たす行列をべき等行列という．

$\boxed{3}$ k を実数とする．連立方程式

$$\begin{cases} 3x - 2y + z &= k \\ 2x + y - z &= 1 \\ 5x - y &= 6 \end{cases}$$

について，以下の問に答えよ．

(1) この連立方程式が解をもつように k の値を定めよ．

(2) k を (1) で求めた値とする．この連立方程式を解け．

$\boxed{4}$ x を実数とし，行列 A を

$$\begin{bmatrix} x-1 & x & x \\ x & x-1 & x \\ x & x & x-1 \end{bmatrix}$$

とする．次の問に答えよ．

(1) $x = 2$ のときの A の階数を求めよ．

(2) x の値によって場合分けをして一般の x に対して A の階数を求めよ．

$\boxed{5}$ k を実数とし，行列 A を

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & k & k \\ 0 & 1 & k & k \\ k & k & 1 & 0 \\ k & k & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする．次の問に答えよ．

(1) $k = 2$ のときの A の行列式を求めよ．

(2) A の行列式を k の式で表せ．

$\boxed{6}$ 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

と定める．次の問に答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A の $(2,2)$ 余因子を求めよ．

(3) A の $(2,3)$ 余因子を求めよ．

(4) A の逆行列を求めよ．

$\boxed{7}$ 行列 A, P をそれぞれ

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

と定める．次の問に答えよ．

(1) A^2 を求めよ．

(2) P の逆行列 P^{-1} を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ を求めよ．

(4) 正の整数 n に対して A^n を求めよ．

$\boxed{8}$ A, B を n 次正方行列とするとき，$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ が成り立つことを示せ．

2024年度　線形数学演習Ⅰ　期末試験　解答用紙（両面１枚）

学籍番号 ______________________　　名前 ______________________

1	(1)			(2)		
2	(1)		(2)		(3)	
	(4)		(5)		(6)	
	(7)		(8)		(9)	
3	(1)			(2)		
4	(1)			(2)		
5	(1)			(2)		
6	(1)			(2)		
	(3)			(4)		

（大問 $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ の解答は次のページ）

7	(1)		(2)	
	(3)		(4)	
8				